慣性系に対し運動をする座標系と慣性力

慣性力と相対運動で解説した内容を掘り下げてみる。

慣性系

慣性の法則が成り立つ座標系を慣性系という。
つまり，
物体に力が働かないとき，その物体の速度が変化しない系
物体の速度が変化しないとき，その物体に力が働かない系
を慣性系という。
ところが，地球上の物体は引力，摩擦，空気抵抗などさまざまな作用を受けるため，
慣性の法則が成り立つのかどうかを厳密に確かめるのは不可能である。
また，宇宙空間においても引力の影響は避けられない。
無の空間あるいはそれに近い空間であれば，物体に力が働かないとしてよいが，
そのような空間で物体の速度が変化しないことを確かめようとしても，
物体の向きや位置を知るための絶対基準がそもそも存在しないため不可能である。
したがって，ある座標系が慣性系であるか否かを判定するのは不可能である。

ニュートン力学における慣性系

ニュートン力学においては，慣性の法則が成り立つとしてよい座標系，
つまり，ニュートンの運動の法則と辻褄が合うような座標系を慣性系と呼ぶ。
たとえば，地上で起こる現象については地表面に固定した座標系を，
太陽系で起こる現象については太陽の重心を原点とする座標系を，
銀河系で起こる現象については銀河の重心を原点とする座標系を慣性系とすれば，
ニュートンの運動の法則を扱う上で不都合が生じない。

非慣性系と慣性力

慣性系に対し加速度運動する座標系や回転運動をする座標系などを非慣性系と呼ぶ。
非慣性系においてニュートンの運動の法則を扱う場合，
慣性系から確認できる力以外の力も仮定しないと
ニュートンの運動の法則を使って力学現象を説明する上で不都合が生じる。
非慣性系においてニュートンの運動の法則を成り立たせるために必要な，慣性系では認められない，仮想の力を慣性力と呼ぶ。

慣性系に対し運動する座標系

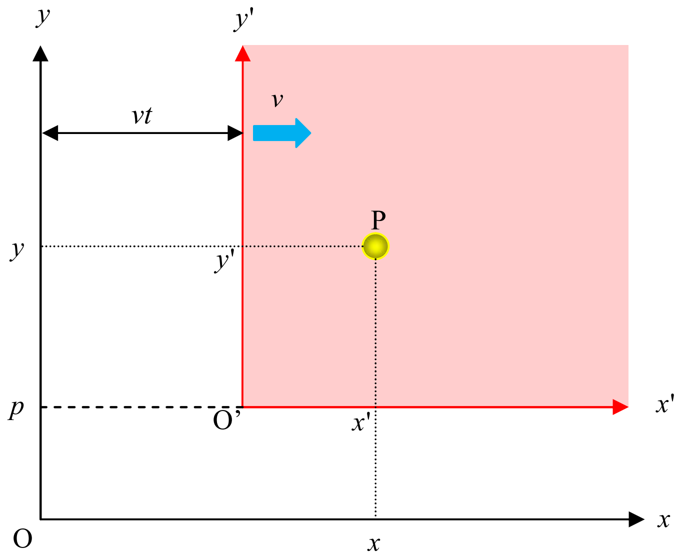
xy 直交座標系を慣性系とする。

$x'y'$ 直交座標系を慣性系に対し運動する座標系とする。

物体 P の質量を m とする。

ここでは慣性系で確認できる外力を「真の外力」と呼び，$F=\begin{pmatrix}F_x\\F_y\end{pmatrix}$ とする。

1. 慣性系に対し等速度運動をする座標系



慣性系に対し，右方向に一定の速さ v で運動している $x'y'$ 直交座標系を考え，

時刻 $t=0$ のとき y' 軸と y 軸が重なっていたとする。

運動中の質点 P の座標 (x,y) と (x',y') について，

$x=x'+vt$，　$y=y'+p$

$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{dx'}{dt}+v$，　$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy'}{dt}$

よって，$\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d^2x'}{dt}$，　$\dfrac{d^2y}{dt^2}=\dfrac{d^2y'}{dt^2}$　・・・①

ここで，慣性系から見た質点 P の運動方程式は，$F_x=m\dfrac{d^2x}{dt^2}$，　$F_y=m\dfrac{d^2y}{dt^2}$　・・・②

①，②より，$F_x=m\dfrac{d^2x'}{dt^2}$，　$F_y=m\dfrac{d^2y'}{dt^2}$

よって，$x'y'$ 直交座標系の観測者が立てる運動方程式は慣性系の運動方程式と一致する。

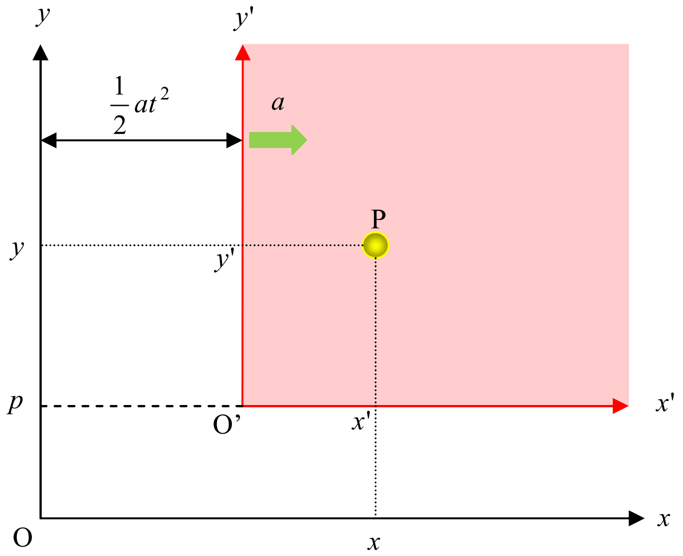
したがって，慣性系に対し等速度運動をする座標系もまた慣性系である。

補足：ある慣性系に対し等速度運動をする座標系はいくらでも設定できるから，

1 つの慣性系が仮定されれば，慣性系は無限個できることになる。

2．慣性系に対し加速度運動をする座標系

簡単のため，慣性系に対して等加速度運動をする座標系を考える。



慣性系に対し，右方向に等加速度 a で運動している $x'y'$ 直交座標系を考え，
時刻 $t=0$ のとき y' 軸と y 軸が重なっていたとする。
運動中の質点 P の座標 (x,y) と (x',y') について，

$$x = x' + \frac{1}{2}at^2 ,\quad y = y' + p$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx'}{dt} + at ,\quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy'}{dt}$$

よって，$\displaystyle \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x'}{dt} + a ,\quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d^2y'}{dt^2}$　・・・③

ここで，慣性系から見た質点 P の運動方程式は，$\displaystyle F_x = m\frac{d^2x}{dt^2} ,\quad F_y = m\frac{d^2x}{dt^2}$　・・・④

③，④より，$\displaystyle F_x = m\frac{d^2x'}{dt^2} + ma ,\quad F_y = m\frac{d^2y'}{dt^2}$

よって，$\displaystyle F_x - ma = m\frac{d^2x'}{dt^2} ,\quad F_y = m\frac{d^2y'}{dt^2}$

ここで，

$\displaystyle F_x - ma = m\frac{d^2x'}{dt^2}$ は，$x'y'$ 直交座標系が x の向きに等加速度 a で運動している場合，
$x'y'$ 直交座標系の質点には，真の外力 F_x 以外の項 $-ma$ が現れることを示している。
力は物体間の相互作用力のことだから作用力と反作用力のセットになっている。
ところが，$-ma$ の項はそうでない。よって，力とはいえない。

しかし，これを力と認めないと，等加速度系においては慣性の法則が成り立たない。

したがって，運動の第 2 法則 $F = ma$ も成り立たない。

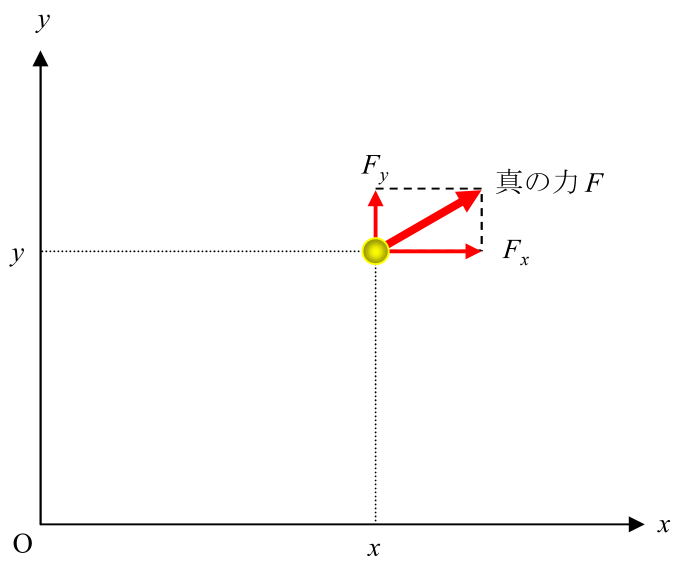
これでは，ニュートン力学が適用できる範囲が慣性系に限られてしまう。

できることなら等加速度系においてもニュートン力学を適用できるようにしたい。

そこで，$-ma$ の項を作用力と反作用力のセットでない不思議な力と認定した。

この力を「慣性力」といい，慣性力が作用する座標系を慣性系に対し非慣性系という。

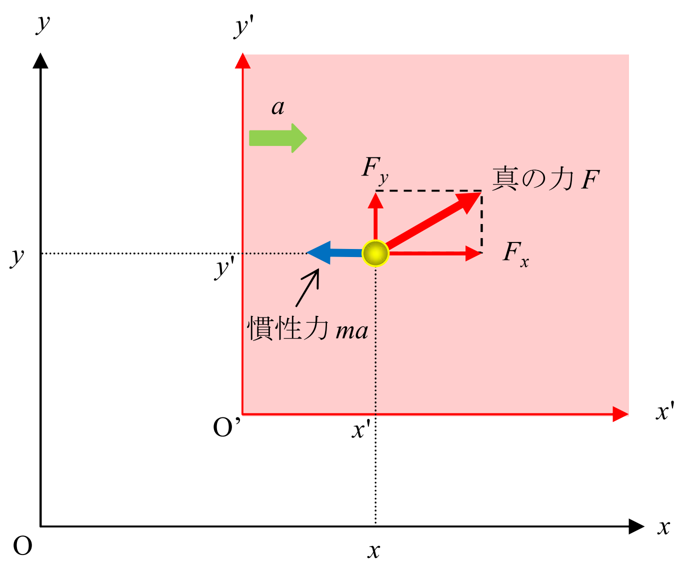
慣性系の中で静止している観測者が図示した質点に作用する力



これを等加速度系の中で静止している観測者が図示した場合

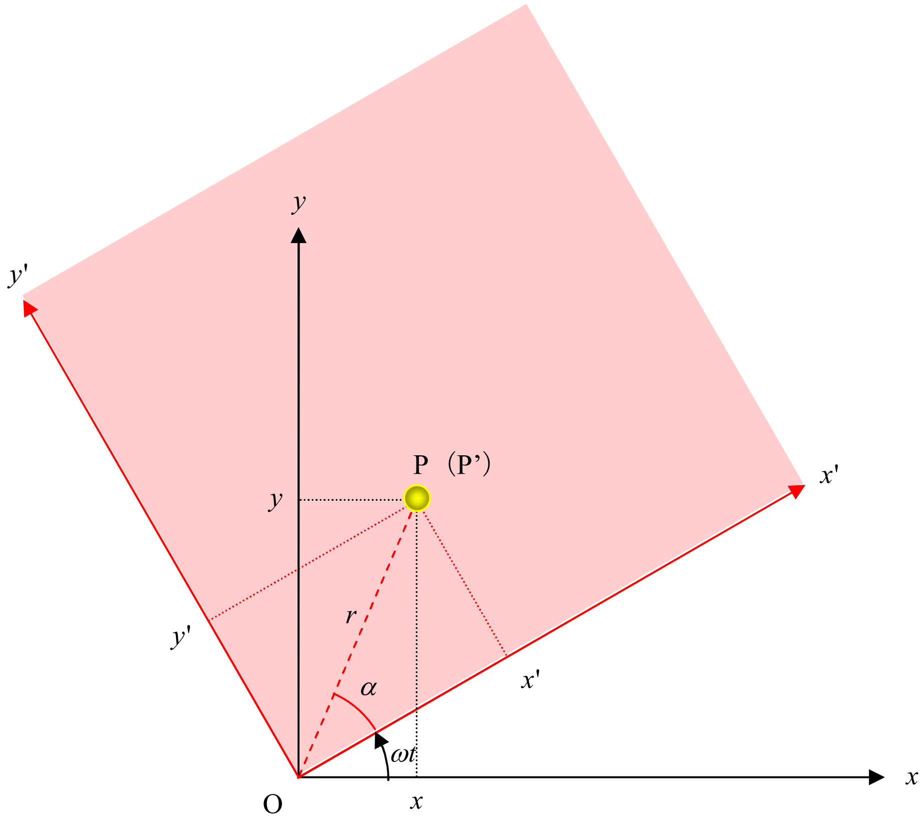
たとえば，地上で起こる現象については地表面に固定した座標系を慣性系とするから，

大地に対し等加速度運動をしている電車内に固定した座標系は等加速度系である。



3. 慣性系に対し回転運動をする座標系

慣性系と原点が同じで角速度 ω で回転する座標系を回転系として考える。
質点の慣性系における位置を $\mathrm{P}(x, y)$，回転系における位置を P’(x', y') とする。



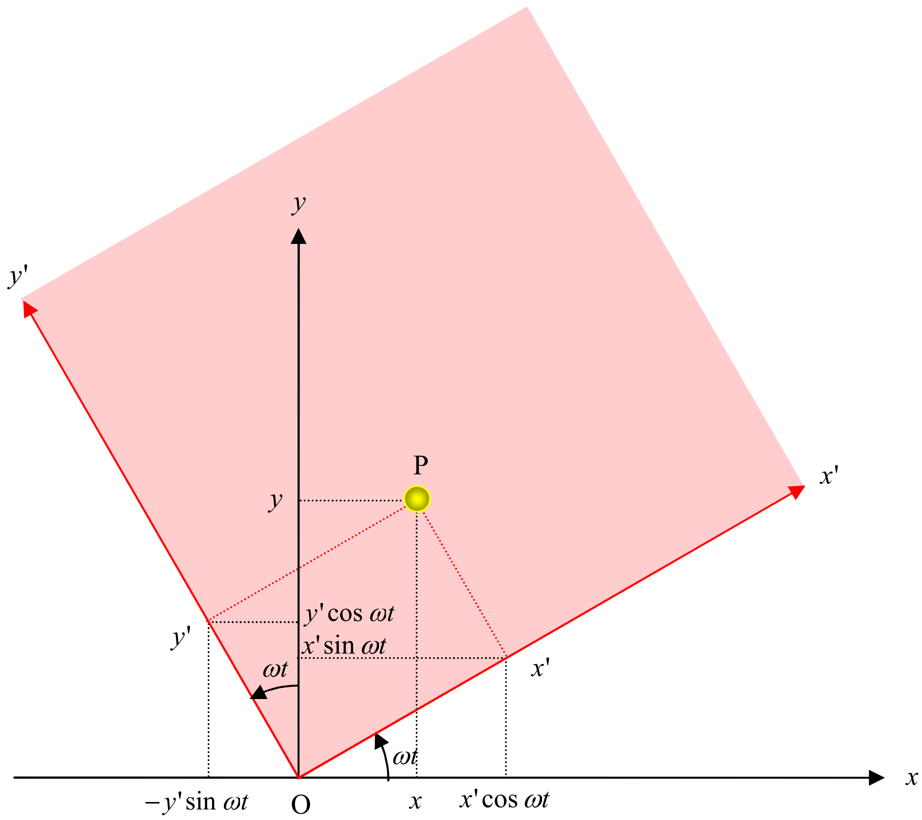
まず，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ の関係について，

$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right| = r$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\omega t + \alpha) \\ r\sin(\omega t + \alpha) \end{pmatrix}$ より，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r\cos(\omega t + \alpha) \\ r\sin(\omega t + \alpha) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\cos\alpha\cos\omega t - r\sin\alpha\sin\omega t \\ r\cos\alpha\sin\omega t + r\sin\alpha\cos\omega t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

よって，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$　　$\therefore \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \overrightarrow{\mathrm{OP'}}$

あるいは，下図より，



$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'\cos\omega t - y'\sin\omega t \\ x'\sin\omega t + y'\cos\omega t \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \quad \therefore \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$$

次に，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\overrightarrow{\mathrm{OP'}}$ を，

つまり $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を t について 2 階微分し，

質点の慣性系における加速度 $\begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix}$ と質点の回転系における加速度 $\begin{pmatrix} \dfrac{d^2x'}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} \end{pmatrix}$ を求める。

まず，$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ を t について微分すると，

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t & -\omega\cos\omega t \\ \omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dx'}{dt} \\ \dfrac{dy'}{dt} \end{pmatrix}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\omega^2\cos\omega t & \omega^2\sin\omega t \\ -\omega^2\sin\omega t & -\omega^2\cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t & -\omega\cos\omega t \\ \omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dx'}{dt} \\ \dfrac{dy'}{dt} \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} -\omega\sin\omega t & -\omega\cos\omega t \\ \omega\cos\omega t & -\omega\sin\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{dx'}{dt} \\ \dfrac{dy'}{dt} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x'}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -x'\omega^2\cos\omega t + y'\omega^2\sin\omega t - 2\dfrac{dx'}{dt}\omega\sin\omega t - 2\dfrac{dy'}{dt}\omega\cos\omega t + \dfrac{d^2x'}{dt^2}\cos\omega t - \dfrac{d^2y'}{dt^2}\sin\omega t \\ -x'\omega^2\sin\omega t - y'\omega^2\cos\omega t + 2\dfrac{dx'}{dt}\omega\cos\omega t - 2\dfrac{dy'}{dt}\omega\sin\omega t + \dfrac{d^2x'}{dt^2}\sin\omega t + \dfrac{d^2y'}{dt^2}\cos\omega t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{d^2x'}{dt^2} - 2\dfrac{dy'}{dt}\omega - x'\omega^2\right)\cos\omega t - \left(\dfrac{d^2y'}{dt^2} + 2\dfrac{dx'}{dt}\omega - y'\omega^2\right)\sin\omega t \\ \left(\dfrac{d^2x'}{dt^2} - 2\dfrac{dy'}{dt}\omega - x'\omega^2\right)\sin\omega t + \left(\dfrac{d^2y'}{dt^2} + 2\dfrac{dx'}{dt}\omega - y'\omega^2\right)\cos\omega t \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x'}{dt^2} - 2\dfrac{dy'}{dt}\omega - x'\omega^2 \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} + 2\dfrac{dx'}{dt}\omega - y'\omega^2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\therefore \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x}{dt^2} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{d^2x'}{dt^2} - 2\dfrac{dy'}{dt}\omega - x'\omega^2 \\ \dfrac{d^2y'}{dt^2} + 2\dfrac{dx'}{dt}\omega - y'\omega^2 \end{pmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot ⑤$$

慣性系と回転系の運動方程式

⑤より， $$\begin{pmatrix} m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m\dfrac{d^2x'}{dt^2} - 2m\dfrac{dy'}{dt}\omega - mx'\omega^2 \\ m\dfrac{d^2y'}{dt^2} + 2\dfrac{dx'}{dt}\omega - my'\omega^2 \end{pmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot ⑥$$

真の力 $F = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ の回転系での成分表示を $F' = \begin{pmatrix} F_x' \\ F_y' \end{pmatrix}$ とし，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP'}} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ の関係を求めたのと同様にして，その関係を求めると，

$$\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\omega t & -\sin\omega t \\ \sin\omega t & \cos\omega t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x' \\ F_y' \end{pmatrix} \quad \cdot\cdot\cdot ⑦$$

慣性系の運動方程式は，運動の第 2 法則$(F = ma)$より， $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\dfrac{d^2x}{dt^2} \\ m\dfrac{d^2y}{dt^2} \end{pmatrix}$

よって，⑥と⑦の右辺の関係は， $\begin{pmatrix} F_x' \\ F_y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\dfrac{d^2x'}{dt^2} - 2m\dfrac{dy'}{dt}\omega - mx'\omega^2 \\ m\dfrac{d^2y'}{dt^2} + 2\dfrac{dx'}{dt}\omega - my'\omega^2 \end{pmatrix}$

ゆえに，

$$F_x' + 2m\frac{dy'}{dt}\omega + mx'\omega^2 = m\frac{d^2x'}{dt^2}$$

$$F_y' - 2m\frac{dx'}{dt}\omega + my'\omega^2 = m\frac{d^2y'}{dt^2}$$

$m\dfrac{d^2x'}{dt^2}$ と $m\dfrac{d^2y'}{dt^2}$ の左辺には，それぞれ $2m\dfrac{dy'}{dt}\omega$ と $mx'\omega^2$， $-2m\dfrac{dx'}{dt}\omega$ と $my'\omega^2$ という真の外力でない項があるのに気づく。

したがって，回転系においてもニュートン力学を適用できるようにするには，

これらの項を慣性力という力として認めなければならない。

そこで，これらの項の $2m\dfrac{dy'}{dt}\omega$ と $-2m\dfrac{dx'}{dt}\omega$， $mx'\omega^2$ と $my'\omega^2$ をペアにし，

$$F_1 = \begin{pmatrix} F_{1x}' \\ F_{1y}' \end{pmatrix} = 2m\omega \begin{pmatrix} \dfrac{dy'}{dt} \\ -\dfrac{dx'}{dt} \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} F_{2x}' \\ F_{2y}' \end{pmatrix} = m\omega^2 \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$ とする。

回転系の質点にはたらく力 $\boldsymbol{F_1}$ について

$\dfrac{dx'}{dt}$ と $\dfrac{dy'}{dt}$ は，それぞれ，回転系での質点の速度の x 成分と y 成分である。

わかりやすさの目的で，
回転系での質点の速度を v'，その x 成分を v_x'， y 成分を v_y' と表すと，

$\dfrac{dx'}{dt}=v_x'$， $\dfrac{dy'}{dt}=v_y'$ より，

$$
\begin{aligned}
F_1 &= \begin{pmatrix} F_{1x}' \\ F_{1y}' \end{pmatrix} \\
&= 2m\omega \begin{pmatrix} v_y' \\ -v_x' \end{pmatrix} \\
&= 2m\omega \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで，

原点を定点とする位置ベクトルを $\vec{a}=\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$ とし，

$\vec{a}$ を原点のまわりに θ 回転してできる位置ベクトルを $\vec{a}'$ とすると，

$\vec{a}'=\begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix}$ と表せる。

$$
\begin{aligned}
\vec{a}' &= \begin{pmatrix} r\cos(\alpha+\theta) \\ r\sin(\alpha+\theta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\alpha - r\sin\theta\sin\alpha \\ r\sin\theta\cos\alpha + r\cos\theta\sin\alpha \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$\vec{a}=\begin{pmatrix} r\cos\alpha \\ r\sin\alpha \end{pmatrix}$ より，

$$\vec{a}'=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\vec{a}$$

よって，

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin(-90°) & \cos(-90°) \end{pmatrix}$ とおくと，

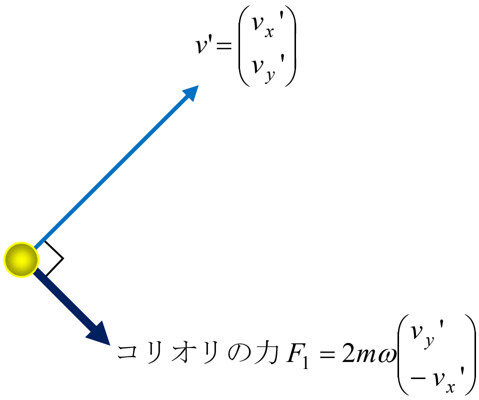
$$F_1=\begin{pmatrix} \cos(-90°) & -\sin(-90°) \\ \sin(-90°) & \cos(-90°) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_x' \\ v_y' \end{pmatrix}$$

このことから，F_1 の向きは，
回転系で運動している質点の運動の向きを $-90°$ 回転した向き，
つまり，右へ 90°　回転した向きであることがわかる。
また，その大きさは，

$$|F_1| = 2m\omega\sqrt{(v_y')^2 + (-v_x')^2} = 2m\omega|v'|$$

以上をまとめると，
　反時計回りの回転系（$\omega > 0$）においては，
　F_1 は運動中の質点に対し，その運動の向きを右へ 90°　変えるように作用し，
　その大きさは，回転系の質点の速さに比例する。
回転系の質点にはたらく力 F_1 は，一般に，コリオリの力（転向力）と呼ばれる。
また，時計回り（$\omega < 0$）の回転系で運動している質点は，
その運動方向に対し左 90°　の向きにコリオリの力を受ける。

反時計回り（$\omega > 0$）の回転系とコリオリの力



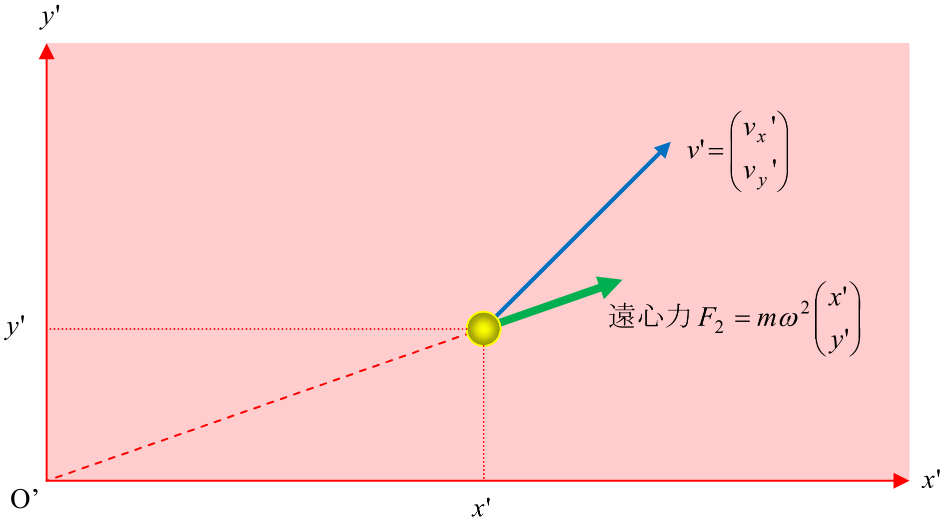
補足
　北極を中心とすると，北半球は反時計回り（$\omega > 0$）の回転系である。
　したがって，北半球上では，物体の運動，水の流れ，空気の流れなど
　あらゆる運動がその向きに対し右向きの力を受ける。
　この理屈でいえば，まっすぐ歩いているのに右足の負担が大きい，車は右側のタイヤがすりへりやすい，川は下流に向かって右岸が削られやすい等ということになる。
　また，コリオリの力の大きさは回転系における質点の速度の大きさに比例するから，
　台風など風速の大きい風は，大きく右へ曲げられ渦になる。
　静止衛星は回転系（地球）で静止している観測者と同じだから，
　静止衛星からはその渦が観測される。

回転系の質点にはたらく力 $\boldsymbol{F_2}$ について

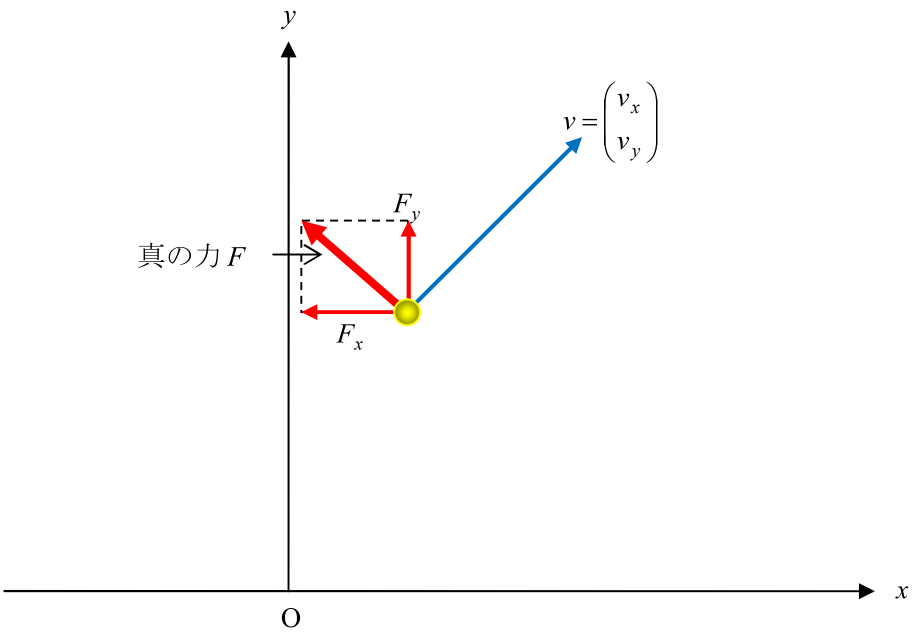
$F_2=\begin{pmatrix}F_{2x}'\\F_{2y}'\end{pmatrix}=m\omega^2\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ より，その向きは回転系における質点の回転半径の向きであり，

回転半径を r とすると，その大きさは，$|F_2|=m\omega^2\sqrt{(x')^2+(y')^2}=m\omega^2 r$

この力 F_2 を遠心力という。



慣性系の中で静止している観測者が図示した質点の運動



これを回転系の中で静止している観測者が図示した場合